Własności funkcji monotonicznych i funkcji o skończonym wahaniu

Definicja. Rodzina (domkniętych) przedziałów $\mathcal{F}$ pokrywa zbiór E w sensie Vitaliego, jeśli dla dowolnego $x \in E$ i $\varepsilon > 0$ istnieje przedział $I \in \mathcal{F}$, dla którego $x \in I$ oraz $|I| \leqslant \varepsilon$

Lemat pokryciowy Vitaliego. Dany jest zbiór $E \subseteq \mathbb{R}$ o skończonej mierze zewnętrznej Lebesgue'a oraz jego pokrycie Vitaliego $\mathcal{F}$. Wówczas dla dowolnego ε istnieje rozłączna skończona podrodzina $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ taka, że

$$|E \setminus \bigcup \mathcal{F}'|_* \leqslant \varepsilon.$$

Dowód. W tej wersji do znalezienia np. na MathOnline.wikidot.com, dokładnie tu i tu. □

Definicja.

$$\overline{D}f(x) := \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{0<|h|<\delta} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
$$\underline{D}f(x) := \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{0<|h|<\delta} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Twierdzenie. Jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca, to

$$|\overline{D}f \geqslant \alpha|_* \leqslant \frac{1}{\alpha}(f(b)-f(a)) \quad \text{dla każdego } \alpha > 0,$$
$$|\overline{D}f = \infty|_* = 0.$$

Zarys dowodu. Oznaczmy $E_\alpha = \{\overline{D}f \geqslant \alpha\}$, ustalmy pomocniczo $\varepsilon > 0$ oraz $0 < \alpha' < \alpha$. Sprawdzamy, że

$$\mathcal{F} = \left\{[c,d] : \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \geqslant \alpha'\right\}$$

jest pokryciem Vitaliego E_α i otrzymujemy $\mathcal{F}' = \{[c_j, d_j]\}$ jak w lemacie. Wtedy

$$\begin{aligned}
|E_\alpha|_* &\leqslant |E_\alpha \setminus \bigcup \mathcal{F}'|_* + |\bigcup \mathcal{F}'|_* \\
&\leqslant \varepsilon + \sum_j (d_j - c_j) \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{1}{\alpha'} \sum_j (f(d_j) - f(c_j)) \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{1}{\alpha'}(f(b) - f(a)),
\end{aligned}$$

co po przejściu granicznym $\varepsilon \searrow 0$, $\alpha' \nearrow \alpha$ daje pierwszą część tezy. Drugą otrzymujemy przez przejście $\alpha \nearrow \infty$. □

Twierdzenie. Jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca, to klasyczna pochodna $f'(x)$ istnieje dla p.w. $x \in (a,b)$.

Zarys dowodu. Oznaczmy $E_{\alpha\beta} = \{\underline{D}f < \beta < \alpha < \overline{D}f < \infty\}$ dla każdej pary liczb wymiernych $0 \leqslant \beta < \alpha$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy zbiór otwarty $E_{\alpha\beta} \subseteq U$ taki, że $|U| \leqslant |E_{\alpha\beta}|_* + \varepsilon$. Sprawdzamy, że

$$\mathcal{F} = \left\{ [c,d] \subseteq U : \frac{f(d) - f(c)}{d - c} < \beta \right\}$$

jest pokryciem Vitaliego $E_{\alpha\beta}$ i otrzymujemy $\mathcal{F}' = \{[c_j, d_j]\}$ jak w lemacie. Z poprzedniego twierdzenia na każdym przedziale $[c_j, d_j]$ mamy

$$|E_{\alpha\beta} \cap [c_j, d_j]|_* \leqslant \Big| \{\overline{D}f \geqslant \alpha\} \cap [c_j, d_j] \Big|_* \leqslant \frac{1}{\alpha}(f(d_j) - f(c_j)),$$

co po zsumowaniu daje

$$|E_{\alpha\beta}|_* \leqslant \frac{1}{\alpha} \sum_j (f(d_j) - f(c_j)) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \sum_j (d_j - c_j) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}|U| \leqslant \frac{\beta}{\alpha}(|E_{\alpha\beta}|_* + \varepsilon).$$

□

Po przejściu granicznym $\varepsilon \searrow 0$ mamy $|E_{\alpha\beta}|_* \leqslant \frac{\beta}{\alpha}|E_{\alpha\beta}|_*$, a więc $|E_{\alpha\beta}|_* = 0$.
Po usunięciu wszystkich zbiorów $E_{\alpha\beta}$ oraz zbioru $\{\overline{D}f = \infty\}$ pozostaje zbiór pełnej miary, na którym zachodzi równość $\overline{D}f = \underline{D}f$, a więc istnieje klasyczna pochodna f'.

Definicja. Dla funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i podziału

$$\nu \ : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$$

definiujemy

$$\begin{aligned} t_\nu &= \sum_{j=1}^{k} f(x_j) - f(x_{j-1}), \\ p_\nu &= \sum_{j=1}^{k} (f(x_j) - f(x_{j-1}))_+, \\ n_\nu &= \sum_{j=1}^{k} (f(x_j) - f(x_{j-1}))_-, \end{aligned}$$

a następnie $T(f,[a,b]) := \sup_\nu t_\nu$, analogicznie $P(f,[a,b])$ oraz $N(f,[a,b])$. Funkcja f ma skończone wahanie na $[a,b]$ ($f \in BV([a,b])$), jeśli $T(f,[a,b]) < \infty$.

Zadanie 1. Funkcja niemalejąca ma skończone wahanie, a dokładnie

$$T(f,[a,b]) = P(f,[a,b]) = f(b) - f(a), \quad N(f,[a,b]) = 0$$

Zadanie 2. Jeśli funkcje g, h są monotoniczne, to funkcja $f = g - h$ również ma skończone wahanie oraz $T(f,[a,b]) \leqslant T(g,[a,b]) + T(h,[a,b])$

Zadanie 3. Jeśli funkcja f ma wahanie skończone, to istnieją funkcje niemalejące g, h takie, że $f = g - h$ oraz $T(f,[a,b]) = T(g,[a,b]) + T(h,[a,b])$. *Wskazówka:* rozważyć $g(x) = P(f,[a,x])$ i $h(x) = N(f,[a,x])$.

Twierdzenie. Jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca, to

$$0 \leqslant \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a).$$

Wniosek: jeśli $f \in BV([a,b])$, to $\int |f'| \leqslant T(f)$.

Zarys dowodu. Przedłużamy f na $\mathbb{R}$, kładąc $f(a)$ i $f(b)$ na odpowiednich półprostych. Rozważmy ciąg funkcji $f_k(x) = \frac{f(x+1/k) - f(x)}{1/k}$ i ich całek

$$\int_a^b f_k = k\left(\int_b^{b+1/k} f - \int_a^{a+1/k} f\right) \leqslant k\left(\int_b^{b+1/k} f(b) - \int_a^{a+1/k} f(a)\right) = f(b) - f(a).$$

Z poprzedniego twierdzenia wiemy, że $f_k(x) \to f'(x)$ p.w., a więc z lematu Fatou wnioskujemy

$$\int_a^b f' \leqslant \liminf \int_a^b f_k \leqslant f(b) - f(a).$$

$\square$